CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE DECLARATE VACANTE/ REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
14 IULIE 2010

Probă scrisă la MATEMATICĂ **VARIANTA 2**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 4 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

ÚLOHA I **30 bodov**

1. Hovoríme, že neprázdna množina $A \subset \mathbb{N}$ má vlastnosť (p), ak súčet dvoch ľubovoľných členov z množiny A, ktoré nemusia byť odlišné, nepatrí do množiny A.

5b **a)** Dokážte, že množina $\{1,4,6\}$ má vlastnosť (p), a množina $\{1,3,6\}$ nemá vlastnosť (p).

4b **b)** Uveďte jeden príklad množiny, obsaženej v množine $\{1,2,3,...,2010\}$, ktorá má 1005 prvkov a ktorá má vlastnosť (p).

3b **c)** Koľko neprázdnych podmnožín množiny $B = \{4,5,6,7,8\}$ majú vlastnosť (p)?

3b **d)** Dokážte, že ak $A \subset \{1,2,3,...,2010\}$ má vlastnosť (p), potom množina A má najviac 1005 prvkov.

2. V rovine α sú dané body $O_1, O_2, ..., O_{100}$, každé tri nekolineárne a množina $M = \{O_1, O_2, ..., O_{100}\}$. Označíme s C_i kružnicu so stredom O_i a polomerom 1, $C_i \subset \alpha$, $i \in \{1,2,3,...,100\}$. Vieme, že pre každé $i, j, k \in \{1,2,3,...,100\}$, jestvuje jedna priamka, ktorá pretína kružnice C_i, C_j a C_k.

5b **a)** Dokážte, že v trojuholníku ABC, v ktorom $AB \le AC$, vzdialenosť od B po AC je menšia alebo rovnaká ako vzdialenosť od C po AB.

4b **b)** Určte počet trojuholníkov, ktorých všetky vrcholy patria množine M.

4b **c)** Dokážte, že jedna výška trojuholníka $O_1O_2O_3$ má veľkosť najviac 2.

2b **d)** Pre každé $i \in \{1,2,3,...,100\}$ označíme s D_i kružnicu so stredom O_i a polomerom 2, $D_i \subset \alpha$. Dokážte, že jestvuje priamka, ktorá pretína všetky kružnice $D_1, D_2, \dots, D_{100}$.

ÚLOHA II **30 bodov**

1. Dané sú matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4b **a)** Dokážte, že $A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 = 0$.

4b **b)** Vypočítajte A^n, kde $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Na množine $G = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ je daná binárna operácia $x \perp y = x^{\ln y}$.

4b **a)** Dokažte, že množina G spolu s operáciou „$\perp$” je komutatívna grupa.

3b **b)** Dokážte, že grupa $(G, \perp)$ tvorí izomorfizmus s grupou $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

3. Daná je funkcia $f : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$.

5b **a)** Určte lokálne extrémne body funkcie f.

4b **b)** Dokážte, že graf funkcie f nemá asimptoty.

4b **c)** Dokáte, že $x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x$, $\forall x > 0$.

2b **d)** Vypočítajte $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) ... \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$.

ÚLOHA III **30 bodov**

Porovnajte expozitívne didaktické metódy (vysvetľovanie, výklad, opis) s vyučovacími metódami prostredníctvom spolupráce (brainstorming, téma/skupinový projekt, mozaik). V porovnaní spresnite: definíciu obidvoch skupín metód, klasifikáciu a opis metód, výhody a nevýhody obidvoch skupín metód uveďte vhodné príklady z vášho predmetu.