CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE DECLARATE VACANTE/ REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
14 IULIE 2010

Probă scrisă la MATEMATICĂ **VARIANTA 2**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 4 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

ЗАВДАННЯ I **30 балів**

1. Вважають, що непорожня множина $A \subset \mathbb{N}$ має властивість (p), якщо сума будь-яких двох , не обов'язково різних, елементів з A не міститься в A.

5б **a)** Докажіть, що множина $\{1,4,6\}$ має властивість (p), а множина $\{1,3,6\}$ не має властивості (p).

4б **b)** Наведіть приклад множини, включеної в $\{1,2,3,...,2010\}$, що має 1005 елементів і має властивість (p).

3б **c)** Скільки непорожних піжмножин множини $B=\{4,5,6,7,8\}$ має властивість (p)?

3б **d)** Докажіть, що, якщо $A \subset \{1,2,3,...,2010\}$ має властивість (p), тоді множина A має щонайбільше 1005 елементів.

2. На площині α розглядають точки $O_1, O_2, ..., O_{100}$, будь-які три – колінеарні, і множина $M=\{O_1, O_2, ..., O_{100}\}$.

Позначають через C_i коло з центром O_i і радіусом 1, $C_i \subset \alpha$, $i \in \{1,2,3,...,100\}$. Відомо, що для будь-яких $i,j,k \in \{1,2,3,...,100\}$, існує пряма, яка перетинає кола C_i, C_j і C_k.

5б **a)** Докажіть, що в трикутнику ABC, де $AB \le AC$, відстань від B до AC є меншою або рівною, ніж відстань від C до AB.

4б **b)** Визначте число трикутників, усі вершини яких містяться у множині M.

4б **c)** Докажіть, що трикутник $O_1O_2O_3$ має одну висоту, довжиною щонайбільше 2.

2б **d)** Для кожного $i \in \{1,2,3,...,100\}$ через D_i позначають коло з центром O_i і радіусом 2, $D_i \subset \alpha$. Докажіть, що існує пряма, яка перетинає усі кола D_1, D_2, … , D_{100}.

ЗАВДАННЯ II **30 балів**

1. Дано матриці $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ і $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

4б **a)** Докажіть, що $A^3-3A^2+3A-I_3=0$.

4б **b)** Обчисліть A^n, де $n \in \mathbb{N}^*$.

2. На множині $G=(0,+\infty)\setminus\{1\}$ дано закон композиції $x \perp y = x^{\ln y}$.

4б **a)** Докажіть, що множина G разом із законом „$\perp$” складає комутативну групу.

3б **b)** Докажіть, що група $(G,\perp)$ є ізоморфною з групою $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

3. Дано функцію $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2$.

5б **a)** Визначте точки локального екстремуму функції *f*.

4б **b)** Докажіть, що графік функції f не має асимптот.

4б **c)** Докажіть, що $x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x,\quad \forall x>0$.

2б **d)** Обчисліть $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

ЗАВДАННЯ III **30 балів**

Виконайте порівняння між дидактичними методами представлення (пояснення, виклад, опис) і навчальними методами взаємодії (мозковий штурм, групова тема/проект, мозаїка). При виконанні порівняння розгляньте: означення обох категорій методів, їх класифікацію та опис, їх переваги та недоліки, з наведенням прикладів з відповідного екзаменаційного предмету.