CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE DECLARATE VACANTE/ REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
14 IULIE 2010

Probă scrisă la MATEMATICĂ **VARIANTA 2**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 4 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

I.TÉTEL **30 pont**

1. Az $A \subset \mathbb{N}$ nem üres halmaz rendelkezik a (p) tulajdonsággal, ha az A halmaz bármely két nem feltétlenül különböző elemének összege nincs az A halmazban.

5p **a)** Mutassa ki, hogy az $\{1,4,6\}$ halmaz rendelkezik a (p) tulajdonsággal, míg az $\{1,3,6\}$ halmaz nem!

4p **b)** Adjon egy példát olyan (p) tulajdonságú halmazra, amelynek 1005 eleme van és részhalmaza az $\{1,2,3,...,2010\}$ halmaznak!

3p **c)** A $B=\{4,5,6,7,8\}$ halmaz hány nem üres részhalmaza rendelkezik a (p) tulajdonsággal?

3p **d)** Ha az $A \subset \{1,2,3,...,2010\}$ halmaz (p) tulajdonságú, igazolja, hogy az A halmaznak legtöbb 1005 eleme van!

2. Az α síkban adottak az $O_1, O_2, ..., O_{100}$ pontok, amelyek közül bármely három nem kollineáris, illetve az $M=\{O_1, O_2, ..., O_{100}\}$ halmaz. Legyen C_i az O_i középpontú és 1 sugarú kör, ahol $C_i \subset \alpha$, $i \in \{1,2,3,...,100\}$. Tudjuk, hogy bármely $i, j, k \in \{1,2,3,...,100\}$ estén létezik egy olyan egyenes, amely metszi a C_i, C_j és C_k köröket.

5p **a)** Mutassa ki, hogy egy ABC háromszögben, ahol $AB \le AC$, a B pont AC egyenestől való távolsága kisebb vagy egyenlő mint a C pont AB egyenestől való távolsága!

4p **b)** Határozza meg azon háromszögek számát, amelyeknek minden csúcsa az M halmazban van!

4p **c)** Mutassa ki, hogy az $O_1O_2O_3$ háromszögnek van egy olyan magassága, amelynek hosszúsága legtöbb 2.

2p **d)** Minden $i \in \{1,2,3,...,100\}$ esetén legyen D_i az O_i középpontú és 2 sugarú kör, ahol $D_i \subset \alpha$. Mutassa ki, hogy létezik egy olyan egyenes, amely metszi az összes $D_1, D_2, \ldots, D_{100}$ kört!

II.TÉTEL **30 pont**

1. Adottak az $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok.

4p **a)** Mutassa ki, hogy $A^3-3A^2+3A-I_3=0$.

4p **b)** Számítsa ki az A^n mátrixot, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

2. A $G=(0,+\infty)\setminus\{1\}$ halmazon adott az $x \perp y = x^{\ln y}$ művelet.

4p **a)** Mutassa ki, hogy a G halmaz a „$\perp$”művelettel kommutatív csoportot alkot!

3p **b)** Mutassa ki, hogy a $(G,\perp)$ csoport izomorf az $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ csoporttal!

3. Adott az $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2$ függvény.

5p **a)** Határozza meg az f függvény helyi szélsőérték pontjait!

4p **b)** Mutassa ki, hogy az f függvénynek nincsenek aszimptotái!

4p **c)** Igazolja, hogy $x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x,\ \ \forall x>0$ esetén!

2p **d)** Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$ határértéket!

III.TÉTEL **30 pont**

Készítsen összehasonlító elemzést a hagyományos, expozitív didaktikai módszerek (magyarázat, előadás, leírás), és az együttműködésre épülő, kooperatív tanulási módszerek (brainstorming, téma/csoportprojekt, mozaik) között. Az összehasonlításba foglalja bele a két módszer meghatározását, bemutatását, alkalmazásuk előnyeit és hátrányait, alátámasztva a vizsgatantárgynak megfelelő sajátos példákkal.